Las superficies regulares son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ definidos localmente por funciones diferenciables e inyectivas $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ con una condición sobre sus derivadas que garantiza que las superficies tienen un plano tangente bien definido en cada punto. En las superficies regulares podemos medir distancias, ángulos y áreas, definir derivadas intrínsecas, hablar de gedésicas y definir la curvatura intrínseca (gaussiana). Estas superficies tienen propiedades geométricas muy buenas, descritas por el teorema egregio y el teorema local de Gauss Bonnet.

Si no pedimos que las funciones $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ sean diferenciables sino solamente continuas, obtenemos una clase mucho mas amplia de superficies, que desde un punto de vista geométrico pueden ser horribles. Estas superficies pueden no tener planos tangentes en ningún punto, las curvas en la superficie pueden no tener direcciones definidas, y es posible que las longitudes de las curvas y las áreas de las regiones encerradas por ellas sean infinitas. Así que aunque estas superficies tengan una forma geométrica extrínseca bien definida en $\mathbb{R}^n$, es posible que no tengan una forma geométrica intrínseca bien definida.

Superficies topologicas.

Una superficie topológica S es un espacio topológico que es la unión de subconjuntos abiertos que son homeomorfos a subconjuntos abiertos del plano:

Dibujo: coordenadas locales

$S = \cup V_i$ donde cada V_i es abierto y existe un homeomorfismo $\phi_i : U_i \to V_i$ para un abierto U_i del plano.

Los ϕ_i se llaman **mapas locales** de S y la colección de $\{\phi_i\}$ es un **atlas** de la superficie.

Observar que si $S = \cup V_i$ y $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ entonces la función $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_j^{-1}(V_i \cap V_j) \to \phi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$, que da el cambio de coordenadas en la intersección de V_i y V_j, es un homeomorfismo que llamaremos Φ_{ij}.

Dibujo: Cambio de coordenadas locales

Podemos usar el atlas para ver la forma topológica de la superficie sin salir del plano: La superficie $S = \cup V_i$ es homeomorfa a la unión disjunta de los U_i's con las identificaciones dadas por las funciones Φ_{ij}.

Dibujo: Podemos ver a una esfera como unión de dos discos abiertos

En el caso de las superficies definidas por funciones diferenciables, las funciones Φ_{ij} son difeomorfismos, y estos nos permiten determinar no solo la forma topológica de la superficie sino su forma suave (salvo difeomorfismos) sin tener que salir del plano, usando solamente los abiertos U_i y las funciones de transición Φ_{ij}. Podemos hablar de curvas suaves en S (aquellas que en coordenadas locales son suaves) de vectores tangentes a S y de funciones diferenciables en S Esto define una **estructura diferenciable** en la superficie,

La misma idea permite definir otras estructuras en las superficies: por ejemplo, si pedimos que las funciones Φ_{ij} manden segmentos de rectas en segmentos de rectas, entonces en la superficie hay una noción de líneas rectas, aun cuando no podamos medir distancias. Esto define una **estructura afín** en la superficie.

O si pedimos que las funciones Φ_{ij} preserven ángulos (aunque no preserven rectas) entonces en la superficie es posible medir ángulos, y esto le define una **estructura conforme** en la superficie.

Finalmente, si en cada abierto U_i elegimos un producto interno para cada punto p que dependa diferenciablemente de p, y las funciones Φ_{ij} preservan este producto interno (en el sentido de que el producto punto de dos vectores basados en p sea igual al producto punto de sus imagenes bajo la diferencial de Φ_{ij} entonces en la superficie podemos medir longitudes de vectores y ángulos y esto le define una **métrica riemanniana** en la superficie.

Una **superficie** es un espacio topológico tal que todos sus puntos tienen vecindades homeomorfas a discos abiertos o a medios discos abiertos. El **borde** de la superficie está formado por los puntos que no tienen vecindades del primer tipo.

Las superficies compactas y sin borde se llaman **cerradas**, las superficies no compactas y sin borde se llaman **abiertas**.

Para saber como son todas las formas posibles de las superficies, hay que hallar una manera de construirlas que garantice que no se escape ninguna posibilidad, y hallar una característica intrínseca e independiente de la construcción que permita distinguir las distintas formas.

Una **triangulación** de una superficie S es una subdivisión S en triángulos topológicos que se tocan en aristas o en vértices. Una superficie es triangulable si y sólo si es homeomorfa a un complejo simplicial.

Teorema: Todas las superficies son triangulables.

Idea de la demostración. Vamos a asumir que S es una superficie sin borde. Cada punto de S tiene una vecindad homeomorfa a un disco abierto, y como S tiene una base numerable, tiene una cubierta formada por una cantidad a lo mas numerable de discos abiertos $D_1, D_2, D_3, ...$ Existen discos cerrados mas pequenos $E_i \subset Di$ cuyos interiores aún cubren a S y podemos suponer que esta cubierta es localmente finita. Aun asi, los E_i's pueden traslaparse de maneras complicadas (ver la figura).

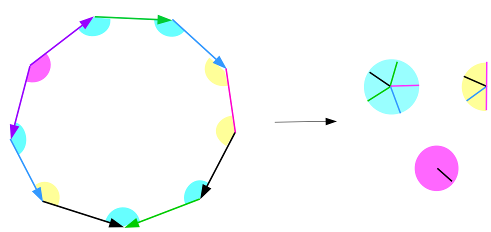
Queremos ver que podemos cubrir a S con discos cerrados que solo se toquen en sus bordes, si logramos hacer esto entonces cada disco es un polígono topológico cuyos lados son las intersecciones con los otros discos y dividiendo a cada polígono en triángulos ya acabamos. Los bordes de los E_i's son curvas simples cerradas, si estas se intersectan en un número finito de puntos, la unión de las curvas corta a S en una colección finita de discos cerrados (ya que por el teorema de Schoenflies los arcos de las curvas que atraviesan a cada E_i lo cortan en discos) y estos se intersectan solo en el borde y ya acabamos. Pero si los bordes se intersectan una infinidad de veces, hay que modificar los E_i's para evitarlo, esto no es tan difícil para superficies suaves, pero es bastante delicado para superficies topológicas. •

Corolario: Cada superficie compacta S puede cortarse para obtener un disco, por lo tanto S puede obtenerse de un disco poligonal identificando lados por pares.

Dem. S es una unión finita de triángulos pegados por aristas. Numeremos los triángulos de modo que el i-esimo triángulo tenga al menos una arista en común con alguno de los triángulos anteriores. El disco es la unión de todos los triángulos, unidos por una arista de cada triángulo de las que lo unen con los anteriores. Las aristas que quedan sin pegar son los lados del polígono. •

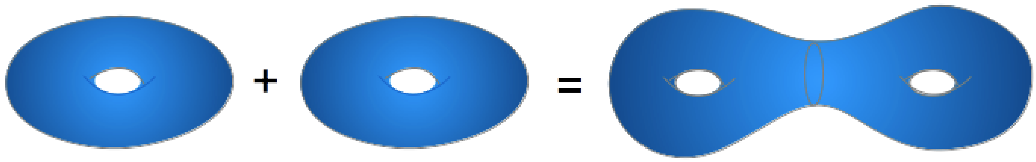
Lema. El resultado de identificar por pares los lados de un polígono siempre es una superficie.

Dem. Basta ver que cada punto del cociente $P/*$ tiene una vecindad homeomorfa a un disco o a medio disco. Esto es inmediato para los puntos que vienen del interior de P o de lados no identificados de P.



Los puntos que vienen de lados identificados de P tienen vecindades que son la unión de dos medios discos y los puntos que vienen de vértices de P tienen vecindades que son la unión de pedazos de discos en las esquinas de P, que se pegan consecutivamente, asi que deben formar un disco o medio disco. •

La **suma conexa** de dos superficies es la superficie que se obtiene quitándole un disco a cada una y pegando los bordes que quedan.

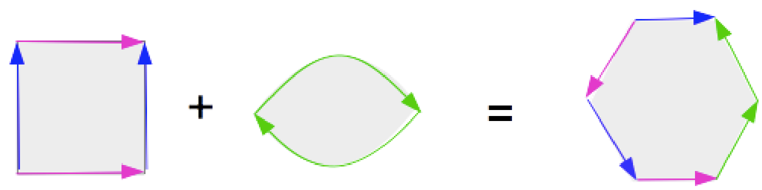


Lema: La suma conexa está bien definida (no depende de los discos ni del pegado).

Dem. Tarea (es consecuencia del teorema del anillo). •

La suma conexa define una operación en el conjunto de las superficies (salvo homeomorfismo) que es asociativa y conmutativa. Sumar esferas no cambia a las superficies (la esfera es el neutro) y sumar discos equivale a hacerle hoyos (quitarle discos) a las superficies.

Observar que los polígonos con identificaciones que dan dos superficies pueden combinarse para obtener un polígono con identificaciones que da su suma conexa:



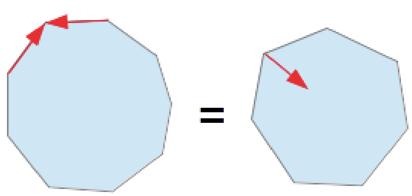
T^2 $\qquad$ P^2 $\qquad$ $T^2 + P^2$.

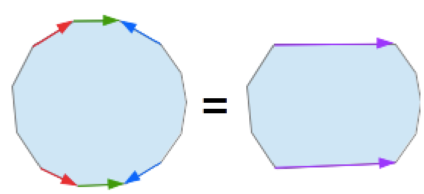
Teorema: Todas las superficies cerradas son homeomorfas a esferas, o sumas conexas de toros y de planos proyectivos.

Dem. Hay que ver que cualquier polígono P con lados identificados por pares puede recortarse y pegarse para obtener otro polígono cuyas identificaciones corresponden a una esfera o una suma conexa. Esto se hace en varios pasos:

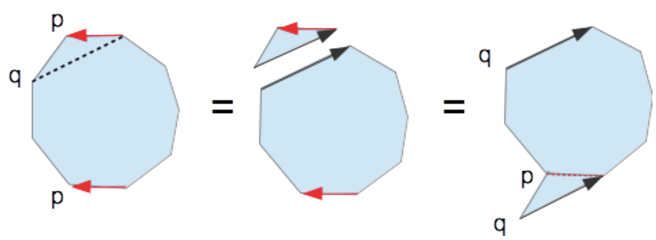
1. Modificar P para que todos sus vértices estén identificados en la superficie:

a) Reducir lo mas posible el número de lados del polígono.

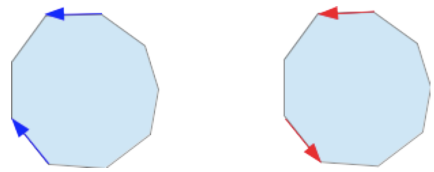




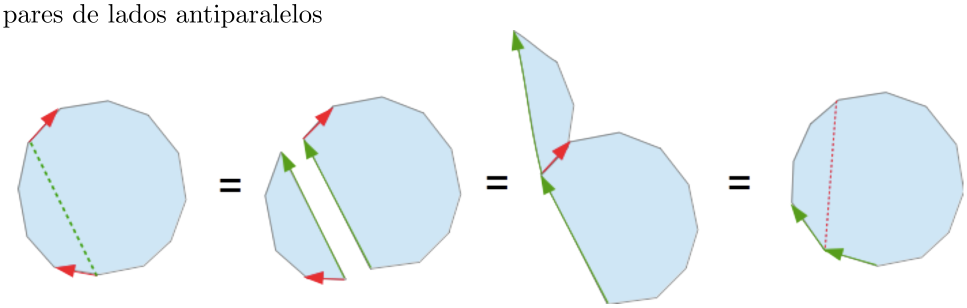
b) Si hay vértices de P que van a dos puntos distintos de la superficie, podemos modificar a P para disminuir los vertices que van al segundo y aumentar los que van al primero (hasta que solo uno vaya al primero, y entonces se puede aplicar a)



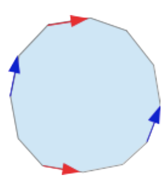
Llamaremos a los pares de lados identificados *paralelos* o *antiparalelos* de acuerdo a su orientación:



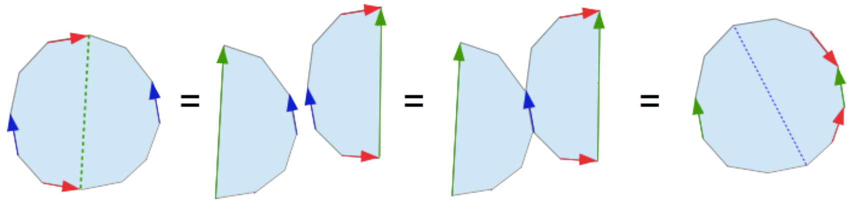
2. Juntar los pares de lados antiparalelos

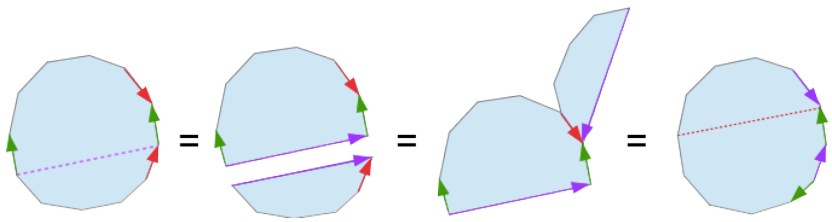


Haciendo los pasos 1 y 2 podemos suponer que todos los vértices del polígono se identifican a un solo punto y que todos los pares de lados antiparalelos son consecutivos. Ahora los pares de lados paralelos que queden tienen que venir en parejas: para cada par de lados paralelos hay otro par de lados paralelos tales que quedan uno de cada lado (de otro modo los vértices de un lado del polígono no estarían identificados con los vértices del otro lado).



3. Juntar parejas de pares de lados paralelos.





Haciendo 1,2 y 3 terminamos con un polígono con los lados identificados en secuencias que corresponden a toros y/o planos proyectivos.

Corolario. Cada superficie cerrada es homeomorfa a una esfera, una suma de toros o una suma de planos proyectivos.

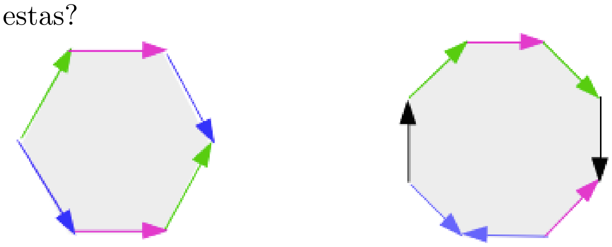
Demostración. Ya sabemos que todas las superficies son homeomorfas a esferas o sumas de toros y/o planos proyectivos, lo que se afirma es que no es necesario mezclarlos, y para probar esto basta observar que $T^2 + P^2 = P^2 + P^2 + P^2$ (tarea).

Si S es una superficie con borde compacta entonces el borde de S es una colección finita de curvas cerradas. Si le pegamos a S un disco en cada una de estas curvas, obtenemos una superficie cerrada S'. Así que cada superficie compacta S se obtiene de una superficie cerrada S' *haciendole hoyos* (quitándole discos) lo que equivale a tomar la suma conexa de S' con un disco por cada componente del borde.

Corolario. Cada superficie con borde compacta es una esfera agujerada, o una suma de toros agujerada o una suma conexa de planos proyectivos agujerada.

Problemas

1. Demuestra que con la suma conexa no hay inversos: si la suma de dos superficies es una esfera, entonces las dos superficies son esferas.
2. Muestra que $P^2 + P^2 + P^2 = T^2 + P^2$.
3. ¿Que superficies son estas?



4. ¿En cuales superficies vale el Teorema de Jordan? ¿Y el teorema de Schoenflies?

5. Demuestra que empezando con dos superficies compactas no homeomorfas y haciéndoles agujeros no pueden obtenerse superficies homeomorfas.

Para distinguir entre las formas topológicas de las superficies, hay que asociarle a cada una algo que no cambie al hacer homeomorfismos pero que si cambie al cambiar de forma. Estos invariantes topológicos pueden ser números, grupos o otras cosas.

Una **subdivisión celular** de una superficie F es una subdivisión de F en subconjuntos homomorfos a discos poligonales que se tocan solamente en aristas o en vértices.

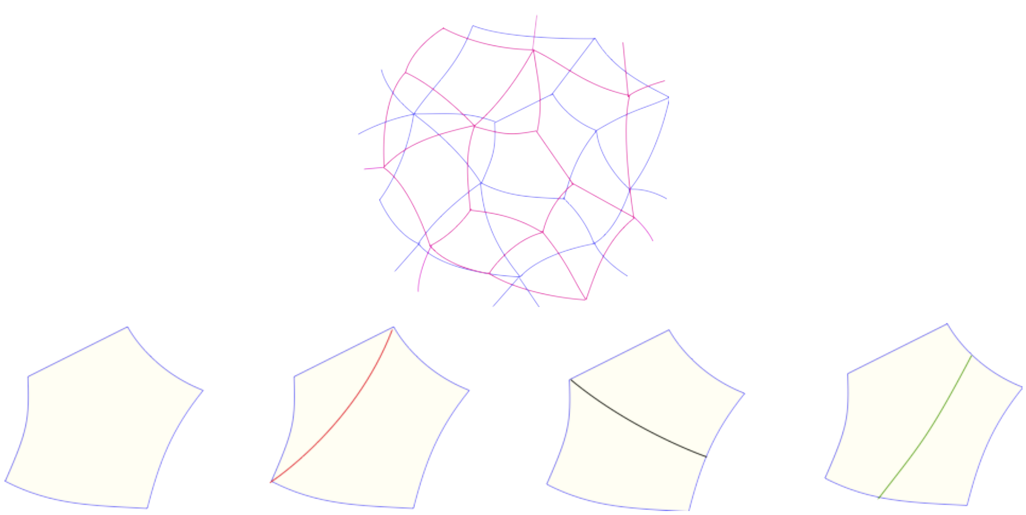
La **característica de Euler** χ de una superficie S subdividida en discos es

$$\chi(S) = v - a + d$$

donde $\quad v = numero\ de\ vertices \quad a = numero\ de\ aristas \quad d = numero\ de\ discos$

Teorema: $\chi(S)$ solo depende de la forma topológica de S (y no de la subdivisión).

Idea de la demostración. Hay que ver que para cualesquiera dos subdivisiones celulares de S el conteo $v - a + c$ es el mismo. Los vértices y las aristas de cada subdivisión forman una gráfica en S. Si dos de estas gráficas se intersectan en un número finito de puntos, su unión es una gráfica finita que da una subdivisión celular común a las dos divisiones originales. Así que para ver que χ es invariante bajo subdivisiones, basta ver que al subdividir cada celda repetidamente, añadiendo cada vez una arista, el conteo no cambia.



v	v	$v+1$	$v+2.$
a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
c	$c+1$	$c+1$	$c+1$

Como el número de aristas aumenta igual que la suma de vértices y celdas, $v-a+c$ no cambia.

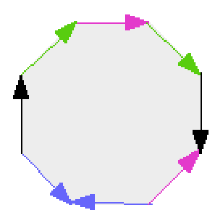
Es posible que las gráficas correspondientes a dos subdivisiones celulares se intersecten en una infinidad de puntos, y que una subdivisión común no exista. En este caso hay que mostrar que es posible deformar una de las gráficas -por una isotopía de la superficie- hasta que intersecte a la otra transversalmente en un número finito de puntos. Como la deformación no cambia el número de vértices, aristas ni celdas, el resultado se sigue de lo anterior. •

Corolario. La característica de Euler distingue la forma topológica de las superficies cerradas orientables y la forma topológica de las superficies no orientables (pero no distingue entre superficies orientables y no orientables).

Demostración. Cada superficie cerrada orientable es homeomorfa a una esfera o una suma de toros, y que cada superficie no orientable es una suma de planos proyectivos. Como la suma de n toros se obtiene de un $4n$-agono identificando los lados por pares e identificando todos los vértices entonces $\chi(nT^2)=2-2n$. Como la suma de m planos proyectivos se obtiene de un $2n$-agono identificando los lados por pares y identificando todos los vértices, entonces $\chi(mP^2)=1-m$. En cada caso, el número n está determinado por el valor de χ. □

El **género** de una superficie orientable es el número de toros en la factorización y el genero de una superficie cerrada no orientable es el número de planos proyectivos (en una factorización sin toros).

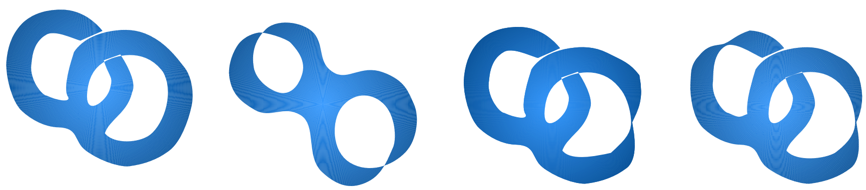
Ejemplo. Considerar la superficie S obtenida al identificar los lados de este polígono:



Al identificar los lados en S quedan 3 vertices, 4 aristas y una celda, por lo tanto $\chi(S)=3-4+1=0$. Como S no es orientable (contiene una banda de Moebius) entonces $S=2P^2=K^2$.

Problemas

6. Muestra que $\chi(S+S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$.
7. Muestra que la caracteristica de Euler, la orientabilidad y el número de componentes en la frontera determinan la forma de cada superficie compacta.
8. ¿Que superficies son estas?



9. Si F es una superficie cerrada orientable y c y c' son dos curvas que no separan a F, entonces hay un homeomorfismo $h : F \to F$ tal que $h(c) = c'$ (primero muestra que la superficie que se obtiene al cortar por c es homeomorfa a la que se obtiene al cortar por c')
10. Demuestra que si F es una superficie de género g entonces cualquier colección de $g+1$ curvas simples, cerradas y ajenas en F separan a F. (hint: ¿Como cambia el genero al cortar por una curva no separante?)

Geometría en superficies

Teorema de Gauss Bonnet Si S es una superficie cerrada orientable, entonces

$$\iint_S K = 2\pi\chi(S)$$

Así que la curvatura gaussiana total de S no depende de la métrica, sino solo de su forma topológica.

Demostración. S se puede cortar en un número finito de triángulos $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ cuyas aristas son curvas suaves que unen los vértices de los triángulos. El Teorema local de Gauss Bonnet dice que para cada triángulo

$$\iint_{\Delta_i} K + \int_{\partial\Delta_i} kg + \alpha_i' + \beta_i' + \gamma_i' = 2\pi$$

donde $\partial\Delta_i$ es la frontera orientada de Δ_i y α_i, β_i y γ_i son sus ángulos externos.

Esto se puede reescribir en términos de los ángulos internos de Δ_i como

$$\iint_{\Delta_i} K = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi - \int_{\partial\Delta_i} kg$$

así que

$$\iint_S K = \sum_{i=1}^{i=n} \iint_{\Delta_i} K = \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \quad - \sum_{i=1}^{i=n} \pi \quad - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\partial \Delta_i} kg =$$
$$= 2\pi(vertices) \quad - \pi(triangulos) \quad - 0$$

donde las integrales de las curvaturas geodésicas se cancelan por pares ya que como la superficie es cerrada y orientada, cada arista aparece 2 veces, pero recorrida en sentido inverso. Como cada triángulo tiene 3 aristas y cada arista está en 2 triángulos entonces $(aristas) = \frac{3}{2}(triangulos)$ así que

$$2\pi(vertices) - \pi(triangulos) = 2\pi(vertices) - 2\pi(aristas) + 2\pi(triangulos) = 2\pi\chi(S) \qquad \square$$

Ejemplo. Si una superficie regular es homeomorfa a una esfera, su curvatura gaussiana total es 4π.

Ejemplo. Para las superficies homeomorfas a un toro, el promedio de la la curvatura gaussiana es 0.

Observar que el teorema como está escrito no vale para superficies con borde, y la prueba no vale para superficies no orientadas.

Ejemplo. Si S es un disco topológico, podemos darle a S una forma plana (con K=0) y su curvatura gaussiana total es 0 y si le damos la forma de un hemisferio (con curvatura constante $K > 0$) su curvatura total es π.

Problemas.

11. Da la fórmula de Gausss Bonnet para superficies con borde.
12. Da una fórmula de Gausss Bonnet para superficies cerradas poliedrales (con caras planas).
13. Da una fórmula de Gausss Bonnet para superficies cerradas con picos aislados.